

1 随机过程初探：从静态概率到动态演化

2 课程介绍

- 课程信息及学习要求
- 课程定位与意义
- 经典引例
- 课程内容

3 概率论回顾

- 概率空间
- 随机变量及其分布
- 长期投资模型的渐近分析

4 矩母函数与母函数

- 矩母函数
- 母函数

5 什么是随机过程

- 随机过程的定义
- 样本轨道
- 随机过程的分布
- 常见的随机过程



定义：

随机过程是研究“随时间变化的随机现象”的数学理论。它不仅仅是概率论的延伸，更是描述动态随机系统的核心工具。

核心对象：研究随时间演变的随机性，例如

- ★ 股票价格波动，
- ★ 排队系统中的顾客到达，
- ★ 通信信号噪声等。

掌握随机过程，都将为我们提供理解与预测的重要工具。

期待：

本学期将与大家一同走进这个既严谨又充满惊喜的领域，共同学习如何用数学语言解读随机中的规律！



定义:

随机过程是研究“随时间变化的随机现象”的数学理论. 它不仅仅是概率论的延申, 更是描述动态随机系统的核心工具.

核心对象: 研究随时间演变的随机性, 例如

- ★ 股票价格波动,
- ★ 排队系统中的顾客到达,
- ★ 通信信号噪声等.

掌握随机过程, 都将为我们提供理解与预测的重要工具.

期待:

本学期将与大家一同走进这个既严谨又充满惊喜的领域, 共同学习如何用数学语言解读随机中的规律!



经典引例——随机游动

模型描述：一个赌徒进行公平赌博，初始资金为 k 。每次掷硬币，正面赢1元，反面输1元。

问题思考：

- (1) 赌徒最终破产的概率是多少？
- (2) 赌徒资金首次达到某个目标值的平均时间是多少？

启示：这类问题无法用静态的概率论完全解决，需要引入“时间”维度，即随机过程。



经典引例——随机游动

模型描述：一个赌徒进行公平赌博，初始资金为 k 。每次掷硬币，正面赢1元，反面输1元。

问题思考：

- (1) 赌徒最终破产的概率是多少？
- (2) 赌徒资金首次达到某个目标值的平均时间是多少？

启示：这类问题无法用静态的概率论完全解决，需要引入“时间”维度，即随机过程。



经典引例——随机游动

模型描述：一个赌徒进行公平赌博，初始资金为 k 。每次掷硬币，正面赢1元，反面输1元。

问题思考：

- (1) 赌徒最终破产的概率是多少？
- (2) 赌徒资金首次达到某个目标值的平均时间是多少？

启示：这类问题无法用静态的概率论完全解决，需要引入“时间”维度，即随机过程。



随机过程研究的是一类随时间演变且带有随机性的现象，例如

- ★ 天气系统的变化
- ★ 股票市场的价格波动
- ★ 服务系统中的排队行为

其核心目标是从看似无序的不确定性中，发掘潜在的规律与结构。



本课程将涵盖：

- ★ 先导部分：概率论基础知识的回顾与必要准备；
- ★ 按经典随机过程模型分章讲解(参考教材目录).



参考书

- ① Feller, W., Probability Theory and its Application, Vol. I (1959: Third edition), Vol. II (1970), Wiley & Son
- ② S.M.劳斯(何声武等译), 随机过程, 中国统计出版社, 1997
- ③ Ross, S.M., Introduction to Probability Models (12th edition), Academic Press, San Diego, 2019



随机过程初探：从静态概率到动态演化

第一章 概率论述要

- ★ 概率论为理解随机过程提供了必要的理论基础与数学工具,
- ★ 随机过程则进一步扩展了我们对动态随机系统的建模与分析能力.

两者紧密结合、相辅相成, 共同构成了现代统计学、机器学习与随机建模的核心基础.



1. 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- ◇ 样本空间 Ω : 所有可能结果的集合.
- ◇ 事件域 \mathcal{F} : Ω 的子集构成的 σ -代数, 代表可观测的事件.
- ◇ 概率测度 \mathbb{P} 满足
 - (1) 非负性: $\mathbb{P}(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}$;
 - (2) 规范性/正则性: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - (3) 可列可加性: 对 \mathcal{F} 中互斥的可列个事件 $\{A_n : n \geq 1\}$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$



重要性质

★ 次可列可加性：若 $A_n \in \mathcal{F}$ ，则

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n);$$

★ 连续性：单调序列的极限与概率运算可交换。



2. 随机变量及其分布

- ◇ 定义：从样本空间到实数轴的可测映射 $\zeta : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
- ◇ 分布函数 $F(x) = \mathbb{P}(\zeta \leq x)$ ，具有单调不减、右连续、极限性质.
- ◇ 常见分布回顾：
 - 离散型：二项分布 $B(n, p)$ 、Poisson 分布 $P(\lambda)$ （用于描述稀有事件发生次数）.



例 1.1.2 : (配对问题) 将 n 个标号的球放入 n 个标号的盒子里, 假设每个盒子放一个球. 用 ζ 表示 n 组中形成的配对数, 那么

(i) ζ 的分布

$$p_k(n) := \mathbb{P}(\zeta = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

(ii) 当 n 很大时, 有

$$\mathbb{P}(\zeta = k) \simeq \frac{e^{-1}}{k!},$$

也就是说 ζ 差不多服从参数为 1 的 Poisson 分布.



证. (i) 用 A_i 表示第 i 组配成对, 有

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}, \quad \mathbb{P}(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad i \neq j, \dots,$$

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

由加法公式, 对任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_0(n) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= 1 - \left[n\mathbb{P}(A_1) - C_n^2 \mathbb{P}(A_1 A_2) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \right] \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!}. \end{aligned}$$



而根据乘法原理, 对任意 $k \leq n$,

$$p_k(n) = \frac{C_n^k p_0(n-k) \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{p_0(n-k)}{k!}.$$

所以

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

(ii) 取 n 充分大, 有

$$\mathbb{P}(\xi = k) \approx \frac{e^{-1}}{k!},$$

也就是说, ξ 差不多是参数是 1 的 Poisson 分布. #



◇ 常见分布回顾：

· 连续型：

指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$

(具有无记忆性: $\mathbb{P}(\zeta > s + t | \zeta > s) = \mathbb{P}(\zeta > t)$.)

正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.



P42, T5. 考虑一个有两名营业员的邮局, 营业员 i 的服务时间是参数 λ_i 的指数变量, $i = 1, 2$. 假设当顾客 A 进去时一名营业员正在给顾客 B 办事而另一名在为顾客 C 服务; 假设已经告诉顾客 A 一旦顾客 B 或顾客 C 离开就为他服务, 试计算三个顾客中 A 最后离去的概率.

注. 先假设几个事件:

D = “三个顾客中 A 最后离去”,

I = “ A 被营业员 1 服务”, II = “ A 被营业员 2 服务”.



P42, T5. 考虑一个有两名营业员的邮局, 营业员 i 的服务时间是参数 λ_i 的指数变量, $i = 1, 2$. 假设当顾客 A 进去时一名营业员正在给顾客 B 办事而另一名在为顾客 C 服务; 假设已经告诉顾客 A 一旦顾客 B 或顾客 C 离开就为他服务, 试计算三个顾客中 A 最后离去的概率.

注. 先假设几个事件:

$D =$ “三个顾客中 A 最后离去”,

$I =$ “ A 被营业员 1 服务”, $II =$ “ A 被营业员 2 服务”.



◇ 随机向量及其联合分布:

- 联合分布函数与边缘分布.
- 独立性:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

或密度函数乘积形式.

- 协方差与相关系数.
- 协方差矩阵: 对于随机向量, 协方差矩阵是对称非负定的.



◇ 随机向量及其联合分布:

- 联合分布函数与边缘分布.
- 独立性:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

或密度函数乘积形式.

- 协方差与相关系数.
- 协方差矩阵: 对于随机向量, 协方差矩阵是对称非负定的.



◇ 随机向量及其联合分布:

- 联合分布函数与边缘分布.
- 独立性:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

或密度函数乘积形式.

- 协方差与相关系数.
- 协方差矩阵: 对于随机向量, 协方差矩阵是对称非负定的.



◇ 随机向量及其联合分布:

- 联合分布函数与边缘分布.
- 独立性:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

或密度函数乘积形式.

- 协方差与相关系数.
- 协方差矩阵: 对于随机向量, 协方差矩阵是对称非负定的.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



3. 数字特征与大数定律

◇ 期望 $\mathbb{E}[\zeta]$: 随机变量的加权平均值(重心).

- 线性性 $\mathbb{E}[a\zeta + b\eta] = a\mathbb{E}\zeta + b\mathbb{E}\eta$;
- 若独立则

$$\mathbb{E}[\zeta\eta] = \mathbb{E}\zeta \cdot \mathbb{E}\eta.$$

◇ 方差 $D(\zeta)$: 衡量波动程度, $D(\zeta) = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2$.

◇ 大数定律(LLN):

- Bernoulli 大数律: 频率依概率收敛于概率.
- Kinchin 大数律: 独立同分布序列的算术平均依概率收敛于期望.
- 强大数定律: 算术平均几乎处处收敛于期望(更强的收敛性).

◇ 中心极限定理(CLT): 独立同分布随机变量和的标准化形式依分布收敛于标准正态分布.



例 1.3.2 用一笔钱进行投资,

【假设 1】每期银行利率 $r > 0$;

① 每期的投资收益率为随机变量 $X > -1$;

② S_0 表示初始投资额, 是常数; S_n 表示 n 期投资之后的财富.

则

$$S_n = S_0(1 + X_1)(1 + X_2) \cdots (1 + X_n),$$

其中 X_1, X_2, \cdots, X_n 为第 $1, 2, \cdots, n$ 期的投资收益率.

【假设 2】投资项目稳定: $\{X_n\}$ 独立且与 X 同分布.



(1) 由期望的性质

$$\mathbb{E}[S_n] = S_0(\mathbb{E}[1 + X])^n = S_0(1 + \mathbb{E}[X])^n,$$

因为 $\mathbb{E}[X] > r > 0$, 所以期望收益 $\mathbb{E}[S_n]$ 趋于无穷.
从预期看, 投资总是很乐观的. 然而这是假象.

(2) 因为 $S_n = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)\right)$. 当 $\mathbb{E}[\log(1 + X)] < 0$
时, 由强大数定律,

$$\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty, \text{ 这时 } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

(举实例.)



(1) 由期望的性质

$$\mathbb{E}[S_n] = S_0(\mathbb{E}[1 + X])^n = S_0(1 + \mathbb{E}[X])^n,$$

因为 $\mathbb{E}[X] > r > 0$, 所以期望收益 $\mathbb{E}[S_n]$ 趋于无穷.
从预期看, 投资总是很乐观的. 然而这是假象.

(2) 因为 $S_n = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)\right)$. 当 $\mathbb{E}[\log(1 + X)] < 0$
时, 由强大数定律,

$$\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty, \text{ 这时 } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

(举实例.)



(1) 由期望的性质

$$\mathbb{E}[S_n] = S_0(\mathbb{E}[1 + X])^n = S_0(1 + \mathbb{E}[X])^n,$$

因为 $\mathbb{E}[X] > r > 0$, 所以期望收益 $\mathbb{E}[S_n]$ 趋于无穷.
从预期看, 投资总是很乐观的. 然而这是假象.

(2) 因为 $S_n = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)\right)$. 当 $\mathbb{E}[\log(1 + X)] < 0$
时, 由强大数定律,

$$\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty, \text{ 这时 } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

(举实例.)



(1) 由期望的性质

$$\mathbb{E}[S_n] = S_0(\mathbb{E}[1 + X])^n = S_0(1 + \mathbb{E}[X])^n,$$

因为 $\mathbb{E}[X] > r > 0$, 所以期望收益 $\mathbb{E}[S_n]$ 趋于无穷.
从预期看, 投资总是很乐观的. 然而这是假象.

(2) 因为 $S_n = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)\right)$. 当 $\mathbb{E}[\log(1 + X)] < 0$
时, 由强大数定律,

$$\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty, \text{ 这时 } S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

(举实例.)



我们可以发现：

核心结论

随机过程揭示：长期财富取决于几何平均($\mathbb{E}[\log(1 + X)]$)，而非算术平均($\mathbb{E}[X]$)。

#



从数学上看, 这里有很深的陷阱.

陷阱是指期望很乐观的投资却几乎总是亏损的, 即对于几乎所有 $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) \rightarrow 0$.

投资陷阱的存在性:

存在这样的随机收益率 X , 使得

$$(1) \mathbb{E}[S_n] \rightarrow +\infty;$$

$$(2) S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

注释. 陷阱的存在性很大程度是因为对数函数的凹性, i.e.,

$$\mathbb{E}[\log(1+X)] \leq \log(1+\mathbb{E}[X]) \quad (:\text{ Jensen 不等式}).$$

适当选取 X 的分布, 右边是正的, 但左边可能会负的.



从数学上看, 这里有很深的陷阱.

陷阱是指期望很乐观的投资却几乎总是亏损的, 即对于几乎所有 $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) \rightarrow 0$.

投资陷阱的存在性:

存在这样的随机收益率 X , 使得

$$(1) \mathbb{E}[S_n] \rightarrow +\infty;$$

$$(2) S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

注释. 陷阱的存在性很大程度是因为对数函数的凹性, i.e.,

$$\mathbb{E}[\log(1+X)] \leq \log(1+\mathbb{E}[X]) \quad (:\text{ Jensen 不等式}).$$

适当选取 X 的分布, 右边是正的, 但左边可能会负的.



矩母函数

定义 1.4.1:

对于随机变量 $X \sim F$, 若下面的数学期望存在, 则称

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbf{R}} e^{tx} dF(x), \quad t \in \mathbf{R}.$$

为 X 的矩母函数.

常见 分布的矩母函数的计算, 见书中例 1.4.1 (1), (2).



随机变量函数的期望

例 1.4.1 (3) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求其矩母函数.

回顾例 1.1.13: 设 $\zeta \sim N(0, 1)$, $a \in \mathbf{R}$, 则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{a\zeta} &= \int_{\mathbf{R}} e^{ax} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2ax)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2} e^{\frac{1}{2}a^2} dx = e^{\frac{1}{2}a^2}.\end{aligned}$$

解. 取 $\zeta = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则由

$$\mathbb{E}\left[e^{a\frac{X-\mu}{\sigma}}\right] = \mathbb{E}e^{a\zeta} = e^{\frac{1}{2}a^2},$$

再记 $\frac{a}{\sigma}$ 为 a , 可得

$$\mathbb{E}e^{aX} = \exp\left\{\mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2\right\}.$$



矩母函数的意义

注. 矩母函数如果存在, 则唯一确定一个概率分布(见书中例 1.4.2).

(1) 通过 $\psi_X(t)$ 可求出 X 的各阶矩:

$$\mathbb{E}[X^n] = \psi_X^{(n)}(0), \quad n \geq 1.$$

(2) 若 X, Y 相互独立, 则

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t).$$

(见书中例 1.4.3.)



母函数

首先 针对实数列 $a = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, 如果幂级数

$$G_a(z) := a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots,$$

在 0 点的一个非空邻域上收敛, 则称它为数列 a 的母函数.

定义 1.4.2

设 ζ 是 \mathbf{Z}_+ -值随机变量, 则其概率分布律是一个有界数列, 定义

$$G_{\zeta}(z) := \sum_{n \geq 0} z^n \mathbb{P}(\zeta = n),$$

称之为 ζ 的母函数.



母函数的性质

(1)

$$G_{\zeta}(z) = \mathbb{E}[z^{\zeta}], \quad \lim_{z \uparrow 1} G_{\zeta}(z) = \mathbb{P}(\zeta < +\infty).$$

(2) 如果 ζ, η : 非负整数值随机变量且 $G_{\zeta} = G_{\eta}$, 那么

ζ 与 η 同分布.

(3) 设 \mathbf{Z}_+ -值随机变量 ζ 的母函数是 G_{ζ} , 那么

$$\mathbb{E}\zeta = G'_{\zeta}(1), \quad \mathbb{E}\zeta^2 = G''_{\zeta}(1) + G'_{\zeta}(1), \dots$$

事实上,

$$G'_{\zeta}(z) = \sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}(\zeta = n) z^{n-1},$$

$$G''_{\zeta}(z) = \sum_{n \geq 1} n(n-1) \mathbb{P}(\zeta = n) z^{n-2}.$$



母函数的意义

注. 1. 数列 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 的卷积, 可定义为如下数列

$$\{u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 : n \geq 0\}.$$

2. 如果 \mathbf{Z}_+ -值随机变量 ζ, η 独立, 那么

$\zeta + \eta$ 的分布列是 ζ 与 η 的分布律的卷积.

定理 1.4.1:

独立 \mathbf{Z}_+ -值的随机变量 ζ, η 的和 $\zeta + \eta$ 的母函数

$$G_{\zeta+\eta}(z) = G_{\zeta}(z) G_{\eta}(z).$$

(该性质与特征函数, 矩母函数类似.)



§2.2 随机过程的基本概念

随机过程是一族随机变量的集合, 用于描述随时间变化的随机现象. 其例随手可得:

- 去某银行办理业务的排队等候时间;
- 股票在一天中的价格变化;
- 某食堂一天中吃饭人数的变化;
- 某路段一天车流量的变化;
- 上海一年降雨量的变化;

.....



设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间, $(E, \mathcal{B}(E))$ 是一个可测空间.
设 T 是一个指标集.

定义 2.2.1

若对任意 $t \in T$, X_t 是 (Ω, \mathcal{F}) 到 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上的可测映射, 则称 $X = \{X_t : t \in T\}$ 为

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上以 E 为状态空间的随机过程,

简称 E -值随机过程或随机过程. 特别地, 离散时间随机过程也称随机序列.

- ◇ 当 E 是实数或复数空间时, 分别称过程是实值过程与复值过程. 本课程研究的都是前者.



见书中例 2.2.1.

- 注. 随机过程 $X_t(\omega) : T \times \Omega \rightarrow E$ 有两种视角,
- 固定 t , $X_t(\cdot)$ 是随机变量;
 - 固定 ω , $X_t(\cdot)$ 是 T 上的函数 (本课程重点).



见书中例 2.2.1.

- 注. 随机过程 $X_t(\omega) : T \times \Omega \rightarrow E$ 有两种视角,
- 固定 t , $X_t(\cdot)$ 是随机变量;
 - 固定 ω , $X_t(\cdot)$ 是 T 上的函数 (本课程重点).



见书中例 2.2.1.

- 注. 随机过程 $X_t(\omega) : T \times \Omega \rightarrow E$ 有两种视角,
- 固定 t , $X_t(\cdot)$ 是随机变量;
 - 固定 ω , $X_t(\cdot)$ 是 T 上的函数 (本课程重点).



见书中例 2.2.1.

- 注. 随机过程 $X_t(\omega) : T \times \Omega \rightarrow E$ 有两种视角,
- 固定 t , $X_t(\cdot)$ 是随机变量;
 - 固定 ω , $X_t(\cdot)$ 是 T 上的函数 (本课程重点).



样本轨道

将随机过程作为一个整体考虑.

对任何 $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ 是 T 到 E 的映射, 称之为 ω 的样本轨道. 一条样本轨道是对过程的一次具体观测结果.

例如,

- 在新闻中看到的股票或者股指走势就是样本轨道;
- 一个花粉在液体表面的运动轨迹也是样本轨道.



样本轨道

将随机过程作为一个整体考虑.

对任何 $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ 是 T 到 E 的映射, 称之为 ω 的样本轨道. 一条样本轨道是对过程的一次具体观测结果.

例如,

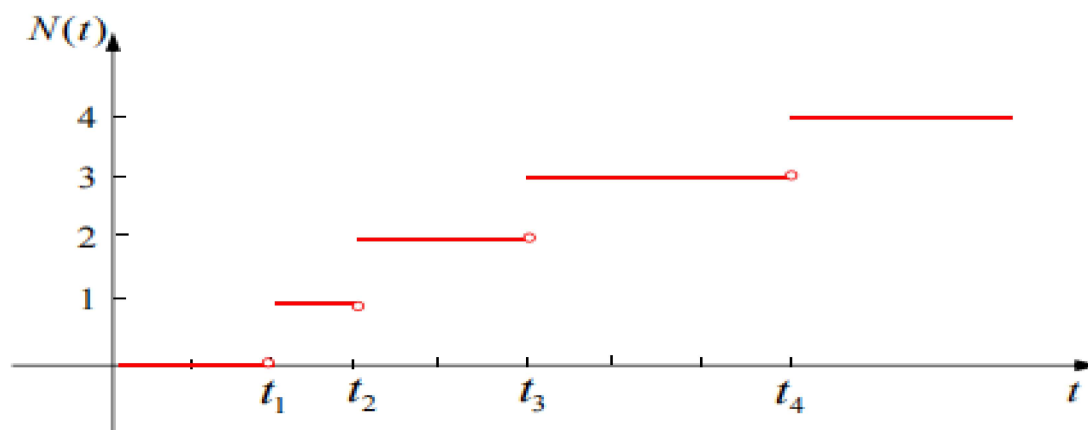
- 在新闻中看到的股票或者股指走势就是样本轨道;
- 一个花粉在液体表面的运动轨迹也是样本轨道.



例如，以 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内到某保险公司理赔的人数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是连续时间离散状态的随机过程，状态空间是

$$E = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

假设不会有两人或两人以上同时理赔，用 t_i 表示第 i 个人的理赔时间，则样本函数如下图。



随机过程的分布——有限维分布是研究随机过程的得力工具.

定义

随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的分布由其有限维分布族完全确定：对任意 $n \geq 1$, 和任意 $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 的联合分布.

注. 通常取 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. 对于已给定的实值过程, 相容性自然满足.



注. 有限维分布族完全确定过程的统计特性, 多用于理论研究.
一般的, 不同随机过程可能有相同的有限维分布族.

定义 2.2.2

(1) 假设 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 与 $X' = \{X'_t, t \geq 0\}$ 是两个随机过程.
若对任意 $n \geq 1$ 和 $t_1, \dots, t_n \in T$, 有

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ 与 } (X'_{t_1}, \dots, X'_{t_n}) \text{ 同分布,}$$

那么称 X 与 X' 同分布 或者等价, 互为版本.



例 2.2.4 (Gauss 过程)

若 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布是多维正态分布, 则称 X 是 Gauss 过程. 进一步地, 如果 $\mathbb{E}X_t = 0, t \in T$, 称 X 是中心化的 Gauss 过程.

取 $\zeta \sim N(0, 1)$, 对 $t \geq 0$, 令 $X_t = \zeta t$, 则 $\{X_t\}$ 是一个平方可积的随机过程.

对任意 $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \zeta(t_1, \dots, t_n)$ 是联合正态分布, 其协方差为

$$\text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = \mathbb{E}(\zeta t_i \cdot \zeta t_j) = t_i t_j.$$

因此 $\{X_t\}$ 是一个 Gauss 过程, 协方差函数 $K(t, s) = ts$. #



例 2.2.4 (Gauss 过程)

若 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布是多维正态分布, 则称 X 是 Gauss 过程. 进一步地, 如果 $\mathbb{E}X_t = 0, t \in T$, 称 X 是中心化的 Gauss 过程.

取 $\zeta \sim N(0, 1)$, 对 $t \geq 0$, 令 $X_t = \zeta t$, 则 $\{X_t\}$ 是一个平方可积的随机过程.

对任意 $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \zeta(t_1, \dots, t_n)$ 是联合正态分布, 其协方差为

$$\text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = \mathbb{E}(\zeta t_i \cdot \zeta t_j) = t_i t_j.$$

因此 $\{X_t\}$ 是一个 Gauss 过程, 协方差函数 $K(t, s) = ts$. #



例 2.2.7 (独立增量过程)

随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 称为有独立增量, 若对任意 $n \geq 1$ 和 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 增量

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

相互独立(即不相重叠区间上的增量独立).

若进一步地, 增量 $X_t - X_s$ 的分布只依赖于时间差 $t - s$, 则称 $\{X_t\}$ 为平稳独立增量过程(即增量分布与起点无关).

假设 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 是独立随机序列, 那么 $\{S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, n \geq 1\}$

是独立增量过程.

进一步, 如果 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 那么 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是平稳独立增量过程.

例 2.2.7 (独立增量过程)

随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 称为有独立增量, 若对任意 $n \geq 1$ 和 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 增量

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

相互独立(即不相重叠区间上的增量独立).

若进一步地, 增量 $X_t - X_s$ 的分布只依赖于时间差 $t - s$, 则称 $\{X_t\}$ 为平稳独立增量过程(即增量分布与起点无关).

假设 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 是独立随机序列, 那么 $\{S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, n \geq 1\}$

是独立增量过程.

进一步, 如果 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 那么 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是平稳独立增量过程.



例 2.2.7 (独立增量过程)

随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 称为有独立增量, 若对任意 $n \geq 1$ 和 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 增量

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

相互独立(即不相重叠区间上的增量独立).

若进一步地, 增量 $X_t - X_s$ 的分布只依赖于时间差 $t - s$, 则称 $\{X_t\}$ 为平稳独立增量过程(即增量分布与起点无关).

假设 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 是独立随机序列, 那么 $\{S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, n \geq 1\}$

是独立增量过程.

进一步, 如果 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 那么 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是平稳独立增量过程.

注释.

常见的平稳独立增量过程包括:

- (◇) Poisson 过程 (计数过程)
- (◇) Brown 运动 (连续轨道)
- (◇) 复合 Poisson 过程

注意: 一般的更新过程不是平稳独立增量过程, 只有当间隔时间为指数分布时 (即 Poisson 过程) 才满足.



注释.

常见的平稳独立增量过程包括:

- (◇) Poisson 过程 (计数过程)
- (◇) Brown 运动 (连续轨道)
- (◇) 复合 Poisson 过程

注意: 一般的更新过程不是平稳独立增量过程, 只有当间隔时间为指数分布时 (即 Poisson 过程) 才满足.



注释.

常见的平稳独立增量过程包括:

- (◇) Poisson 过程 (计数过程)
- (◇) Brown 运动 (连续轨道)
- (◇) 复合 Poisson 过程

注意: 一般的更新过程不是平稳独立增量过程, 只有当间隔时间为指数分布时 (即 Poisson 过程) 才满足.

